Une preuve directe du théorème de Malus-Dupin utilisant la structure symplectique de l'ensemble des droites orientées

Charles-Michel Marle

▶ To cite this version:

Charles-Michel Marle. Une preuve directe du théorème de Malus-Dupin utilisant la structure symplectique de l'ensemble des droites orientées. 2014. hal-01062974

HAL Id: hal-01062974
https://hal.science/hal-01062974

Preprint submitted on 11 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE PREUVE DIRECTE DU THÉORÈME DE MALUS-DUPIN UTILISANT LA STRUCTURE SYMPLECTIQUE DE L'ENSEMBLE DES DROITES ORIENTÉES

Charles-Michel Marle

Ce modeste travail est dédié à la mémoire
des anciens élèves de l 'École Polytechnique
Étienne Louis Malus (X 1794) et Pierre Charles François Dupin (X 1801),
dans l'espoir que dans l'avenir cette école formera,
comme elle le fit brillamment autrefois,
des scientifiques et des ingénieurs de haut niveau et des grands soldats
plutôt que des gestionnaires, des assureurs, des banquiers et des « traders ».

Résumé. — Nous présentons une preuve directe du théorème de Malus-Dupin de l'optique géométrique basée sur la structure symplectique de l'ensemble des droites orientées d'un espace affine euclidien.

Abstract. — We present a direct proof of Malus-Dupin' theorem in Geometrical Optics founded on the symplectic structure of the set of all oriented straight lines in an Euclidean affine space.

1. Introduction

En Optique géométrique, la propagation de la lumière est décrite en termes de *rayons lumineux*. En physique classique (non relativiste) l'espace physique dans lequel nous vivons et dans lequel la lumière se propage est assimilé à un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni, une fois choisie une unité de longueur, d'une structure euclidienne. L'ensemble de toutes

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 53D05, 53D12, 53B50, 7803.

Mots clefs. — Optique géométrique, théorème de Malus-Dupin, structures symplectiques, sous-variétés lagrangiennes.

les droites orientées de $\mathcal{E}$ sera noté $\mathcal{L}$. Dans un milieu transparent homogène et isotrope remplissant tout l'espace, un rayon lumineux est assimilé à une droite orientée de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire à un élément de $\mathcal{L}$. Dans un milieu transparent qui n'occupe qu'une partie de l'espace, un rayon lumineux est assimilé à un segment de droite orienté contenu dans la partie de l'espace occupée par ce milieu, mais il est plus commode, pour les raisonnements qui vont suivre, de considérer toute la droite orientée qui porte ce segment. Les réflexions sur un miroir, assimilé à une surface lisse (c'est-à-dire différentiable, de classe C^∞) de $\mathcal{E}$, ou les réfractions à travers une surface lisse séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents, peuvent alors être décrits comme les transformations de l'espace $\mathcal{L}$ (c'est-à-dire les applications d'un ouvert de $\mathcal{L}$ sur un autre ouvert de cet espace) qui associent à un rayon incident le rayon réfléchi ou réfracté correspondant.

L'ensemble $\mathcal{L}$ dépend de 4 paramètres : il faut en effet deux paramètre pour déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ parallèle à une droite orientée $L \in \mathcal{L}$ et de même sens, et deux autres paramètres (par exemple les coordonnées du point d'intersection de L avec un plan fixe qui lui est transverse) pour déterminer la position de cette droite. Nous montrerons que $\mathcal{L}$ possède une structure naturelle de variété symplectique de dimension 4 [(1)].

L'optique géométrique considère souvent des sous-familles de l'ensemble $\mathcal{L}$ des rayons lumineux dépendant différentiablement d'un nombre de paramètres inférieur à 4. Par exemple, les rayons issus d'une source lumineuse ponctuelle, et les rayons émis par une surface lumineuse dont chaque point émet un unique rayon normal à cette surface, forment des familles de rayons dépendant différentiablement de 2 paramètres. En repectant la terminologie employée par Hamilton **[7]**, introduisons les deux définitions suivantes.

Définition 1.1. — La *classe* (en anglais *class*) d'une famille de rayons lumineux dépendant différentiablement d'un nombre fini de paramètres est le nombre de ces paramètres.

Définition 1.2. — Une famille différentiable de rayons de classe 2 est dite *rectangulaire* (en anglais *rectangular*) si, en chaque point de la partie de l'espace éclairée par les rayons de cette famille, il existe un petit

1. Plus généralement, l'ensemble des droites orientées d'un espace affine euclidien de dimension n est une variété symplectique de dimension $2(n-1)$.

morceau de surface différentiable orthogonal à tous les rayons qui le rencontrent.

La définition ci-dessus n'est bien sûr pas parfaitement rigoureuse, mais nous nous en contenterons dans ce travail qui se veut facile et élémentaire. En effet, pour presque toute famille de rayons de classe supérieure à 1, il existe une partie de l'espace dans laquelle plusieurs nappes de la famille de rayons considérée se superposent. En un point régulier, possédant un voisinage dans lequel le nombre de nappes superposées est constant, il est possible de rendre la définition plus rigoureuse en considérant séparément chacune de ces nappes. Les points non réguliers, au voisinage desquels le nombre de nappes superposées change brusquement, sont plus difficiles à étudier : ils forment les *surfaces caustiques* de la famille de rayons. Ces surfaces ont été étudiées par Hamilton dès 1824 alors qu'il n'avait que 19 ans, pour une famille différentiable de rayons de classe 2 générale (pas nécessairement rectangulaire) [**6**]. Les lecteurs intéressés par ces questions délicates relevant de la théorie des singularités pourront consulter [**1**], chapitre 9, paragraphe 46, pages 248–258 et appendice 11, pages 438–439.

Dans un milieu transparent homogène et isotrope, la famille de rayons issus d'un point lumineux est rectangulaire : les sphères centrées sur le point lumineux sont en effet orthogonales à tous les rayons. Il en est de même de la famille de rayons émis par une surface lumineuse dont chaque point émet un seul rayon dans la direction orthogonale à la surface lumineuse : c'est en effet une propriété géométrique connue de la famille des normales à une surface différentiable, que les géomètres des deux derniers siècles appelaient *congruence normale*.

Le théorème de Malus-Dupin affirme qu'une famille de rayons rectangulaire (donc différentiable et de classe 2) qui se propage à travers un système optique comportant un nombre quelconque de surfaces réfléchissantes lisses et de surfaces lisses séparant des milieux transparents homogènes et isotropes d'indices de réfraction différents, reste rectangulaire dans tous les milieux dans lesquels elle se propage.

Après une brève présentation du contexte historique (paragraphe 2), nons donnons une preuve directe du théorème de Malus-Dupin utilisant les méthodes de la géométrie symplectique. Dans le paragraphe 3 nous prouvons que l'ensemble $\mathcal{L}$ des droites orientées de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est une variété différentiable de dimension 4, naturellement munie d'une forme symplectique ω. Nous définissons ω comme l'image réciproque, par un difféomorphisme naturel de $\mathcal{L}$ sur le fibré $T^*\Sigma$ cotangent à une sphère Σ de dimension 2, de la forme symplectique canonique de $T^*\Sigma$. Nous montrons que ω est bien déterminée, bien qu'il y ait un certain degré d'arbitraire dans la définition du difféomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $T^*\Sigma$. Puis nous prouvons (paragraphe 4) que la réflexion sur une surface lisse est un difféomorphisme symplectique d'un ouvert de $(\mathcal{L}, \omega)$ sur un autre ouvert et que la réfraction à travers une surface lisse séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction n_1 et n_2 est un difféomorphisme symplectique d'un ouvert de $(\mathcal{L}, n_1\omega)$ sur un ouvert de $(\mathcal{L}, n_2\omega)$. Nous montrons (paragraphe 5) qu'une famille différentiable de rayons de classe 2 est rectangulaire si et seulement si c'est une sous-variété lagrangienne immergée (pas nécessairement plongée) de $(\mathcal{L}, \omega)$. Nous concluons au paragraphe 6 en montrant que le théorème de Malus-Dupin est une conséquence immédiate des résultats obtenus dans les paragraphes précédents.

Les lecteurs trouveront dans le l'ouvrage déjà cité [**1**] et dans le livre [**5**] (Introduction, pp. 1–150) des applications beaucoup plus élaborées de la géométrie symplectique à l'optique géométrique.

2. Contexte historique

Étienne Louis Malus (1775–1812) est un militaire, mathématicien et physicien français qui a étudié les propriétés géométriques des familles de droites orientées de l'espace, en vue d'applications aux rayons lumineux. Il perfectionna la théorie ondulatoire de la lumière de Christian Huygens (1629–1695), découvrit et étudia le phénomène de *polarisation* de la lumière et le phénomène de *biréfringence* apparaissant lors de la propagation de la lumière dans certains cristaux. Il participa à la désastreuse campagne de Napoléon en Égypte (1798–1801). Sa mort prématurée est probablement due à des maladies contractées lors de cette campagne. Il prouva [**9**] que la famille de rayons émise par une source lumineuse ponctuelle (qui est rectangulaire, nous l'avons vu ci-dessus) reste rectangulaire après réflexion sur *un* miroir lisse ou réfraction à travers *une* surface lisse séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents. Mais il doutait que cette propriété reste vraie pour *plusieurs* réflexions ou réfractions successives [**10**] [2]. Ses travaux sur les familles de droites orientées ont été plus tard utilisés et considérablement améliorés par Hamilton [**6, 7**].

Charles François Dupin (1784–1873) est un ingénieur du génie maritime et mathématicien français. Son nom est attaché à plusieurs objets mathématiques appartenant au domaine de la géométrie différentielle : les *cyclides de Dupin*, de remarquables surfaces qu'il découvrit alors qu'il était encore élève de l'École Polytechnique, l'*indicatrice de Dupin* qui renseigne sur la forme d'une surface au voisinage d'un point. Je ne pense pas que le théorème d'Arnold mentionné en bas de page s'applique à ces objets, qui sont bien à lui. D'après Wikipedia [**13**], il aurait inspiré au poète et romancier Edgar Allan Poe (1809–1849) le personnage du chevalier Auguste Dupin, qui apparaît dans les trois nouvelles : *Double assassinat dans la rue Morgue*, *Le mystère de Marie Roget* et *La lettre volée*. Il donna une preuve géométrique très simple du théorème de Malus-Dupin pour les réflexions [**4**] et savait que ce théorème est vrai aussi pour les réfractions mais n'a pas publié de preuve de ce résultat.

D'après [**2**], Adolphe Quetelet (1796–1874) et Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) ont donné en 1825 une preuve du théorème de Malus-Dupin à la fois pour les réflexions et les réfractions. Indépendamment, le grand mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805–1865) a lui aussi donné une preuve complète de ce théorème dans son célèbre mémoire [**7**], dans lequel il cite Malus, mais pas Dupin, ni Quetelet, ni Gergonne. Cela explique peut-être pourquoi le théorème de Malus-Dupin, ainsi nommé dans les cours français d'optique [**3**], est plus souvent appelé *théorème de Malus* à l'étranger. La preuve de Hamilton est fondée sur la stationnarité du chemin optique entre deux points d'un rayon lumineux vis-à-vis des déplacements infinitésimaux, sur les surfaces réfléchissantes ou réfractantes, des points intermédiaires où ont lieu des réflexions ou des réfractions.

2. Voici une belle illustration du fameux théorème d'Arnold : *lorsqu'un théorème ou un objet mathématique porte le nom d'une personne, cette personne n'est pas celle qui a prouvé ce théorème ou créé cet objet.* Arnold ajoutait avec humour : *bien sûr, mon théorème s'applique à lui-même !*

3. La structure symplectique de l'ensemble des droites orientées

Proposition 3.1. — *Il existe sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des droites orientées de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 une structure naturelle de variété différentiable de dimension 4 et une forme symplectique ω ; cet ensemble est difféomorphe, par un difféomorphisme symplectique, au fibré cotangent $T^*\Sigma$ à une sphère Σ de dimension 2, muni de sa forme symplectique naturelle.*

Démonstration. — Soit Σ une sphère de rayon R quelconque, par exemple $R = 1$, centrée en un point $C \in \mathcal{E}$, et soit O un autre point de $\mathcal{E}$. On peut bien sûr prendre $O = C$, mais il est préférable pour la clarté de la preuve de ne pas le faire. Une droite orientée $L \in \mathcal{L}$ détermine

– un point unique $m \in \Sigma$ tel que le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Cm}$ soit parallèle à L et de même sens,
– une forme linéaire η sur l'espace vectoriel $T_m\Sigma$ tangent en m à la sphère Σ ayant pour expression, pour tout vecteur $\overrightarrow{w} \in T_m\Sigma$,

$$\eta(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{W} \,,$$

où P est un point quelconque de la droite L et où $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{w}$ est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{w}$.

Le couple (m, η) est un élément du fibré cotangent $T^*\Sigma$. D'ailleurs, puisque m est déterminé par η (c'est le point de la sphère Σ auquel le covecteur η est attaché), on peut dire que η est un élément de $T^*\Sigma$.

Réciproquement, un élément $\eta \in T^*\Sigma$, c'est-à-dire une forme linéaire η sur l'espace vectoriel tangent à Σ en un certain point $m \in \Sigma$, détermine la droite orientée L, parallèle au vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Cm}$ et de même sens, formée par tous les points $P \in \mathcal{E}$ qui vérifient

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{w} = \eta(\overrightarrow{w}) \quad \text{pour tout} \overrightarrow{w} \in T_m\Sigma \,.$$

Sur $T^*\Sigma$ il existe ([**11**] p. 59, [**8**] p. 176) une 1-forme différentielle λ_Σ appelée *forme de Liouville*, dont la différentielle extérieure $\mathrm{d}\lambda_\Sigma$ est une forme symplectique, appelée *forme symplectique canonique* de ce fibré cotangent. La correspondance bijective ci-dessus décrite permet de transporter sur $\mathcal{L}$ la topologie et la structure différentiable de $T^*\Sigma$, ainsi que la forme de Liouville λ_Σ et sa différentielle extérieure $\mathrm{d}\lambda_\Sigma$; nous obtenons ainsi sur $\mathcal{L}$ une 1-forme différentielle λ_O et une forme symplectique $\omega = \mathrm{d}\lambda_O$, images réciproques (par cette correspondance bijective, qui devient un difféomorphisme symplectique) de la forme de Liouville λ_Σ et de la forme symplectique canonique $\mathrm{d}\lambda_\Sigma$ de $T^*\Sigma$. Munie de ω, $\mathcal{L}$ devient une variété symplectique notée $(\mathcal{L}, \omega)$.

Le difféomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $T^*\Sigma$ ainsi construit, la 1-forme λ_O et sa différentielle extérieure $\omega = \mathrm{d}\lambda_O$ *ne dépendent pas* du choix du point C, centre de la sphère Σ (moyennant la convention bien naturelle d'identifier deux sphères de même rayon centrées en deux points différents C et C' de $\mathcal{E}$ grâce à la translation qui amène C sur C'). Par contre ce difféomorphisme, ainsi que la 1-forme λ_O et la structure de fibré vectoriel de base Σ ainsi transportées sur $\mathcal{L}$, *dépendent* du choix du point O (sans toutefois que la topologie, la structure différentiable et la structure de fibré affine de base Σ transportées sur $\mathcal{L}$ en dépendent). Si à une droite orientée donnée $L \in \mathcal{L}$ le choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ fait correspondre le covecteur $\eta \in T^*_m\Sigma$, attaché au point $m \in \Sigma$, le choix d'un autre point $O' \in \mathcal{E}$ fait correspondre à L le covecteur $\eta + \mathrm{d}f_{O'O}(m)$, attaché au même point $m \in \Sigma$, où $f_{O'O} : \Sigma\mathbb{R}$ est la fonction différentiable

$$f_{O'O}(n) = \overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{Cn}\,, \quad n \in \Sigma\,.$$

Si, avec le choix de O, la 1-forme sur $\mathcal{L}$ image réciproque de λ_Σ est λ_O, avec le choix de O' cette 1-forme est donc

$$\lambda_{O'} = \lambda_O + \mathrm{d}(f_{O'O} \circ \pi_\Sigma)$$

où $\pi_\Sigma : T^*\Sigma \to \Sigma$ est la projection canonique. La forme symplectique ω sur $\mathcal{L}$ *ne dépend pas* du choix du point O, ni du choix du point C, car

$$\omega = \mathrm{d}\lambda_O = \mathrm{d}\lambda_{O'} \quad \text{puisque } \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0\,. \qquad \square$$

Proposition 3.2. — *Soit $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associé à l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Chaque droite orientée $L \in \mathcal{L}$ peut être déterminée par son vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$ et par un point $P \in L$ (défini seulement à addition d'un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ près). La forme symplectique ω, exprimée au moyen des coordonnée (p_1, p_2, p_3) de P dans le repère affine $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ et des componsantes (u_1, u_2, u_3) of $\overrightarrow{u}$, s'écrit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}u_i\,.$$

Démonstration. — En employant la définition de la forme de Liouville λ_Σ sur $T^*\Sigma$, nous pouvons écrire

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{3} p_i \mathrm{d}u_i \,.$$

Par suite

$$\omega = \mathrm{d}\lambda_O = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}u_i \,. \qquad \square$$

Remarque 3.3. — Les trois composantes u_1, u_2, u_3 de $\overrightarrow{u}$ ne sont pas indépendantes, puisque $\sum_{i=1}^{3}(u_i)^2 = 1$. Le point $P \in L$ employé pour déterminer L n'est pas unique puisqu'on peut lui ajouter un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ quelconque. Mais cela n'enlève rien à la validité de l'expression de ω donnée par la proposition 3.2.

Remarque 3.4. — La forme symplectique ω peut s'écrire de manière très concise grâce à l'emploi d'une notation vectorielle combinant les produits scalaire et extérieur :

$$\omega(P, \overrightarrow{u}) = \mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{u} \,.$$

4. Les réflexions et réfractions sont des difféomorphismes symplectiques

Proposition 4.1. — *Soit $M \subset \mathcal{E}$ une surface lisse réfléchissante. L'application* Reflex_M *qui associe, à chaque rayon lumineux L_1 qui rencontre M du côté réfléchissant, le rayon réfléchi $L_2 = \mathrm{Reflex}_M(L_1)$, est un difféomorphisme symplectique de l'ouvert de $\mathcal{L}$ formé par les rayons lumineux qui rencontrent M du côté réfléchissant sur l'ouvert de $\mathcal{L}$ formé par les mêmes droites avec l'orientation opposée.*

Démonstration. — Chaque droite orientée L_1 qui rencontre M du côté réfléchissant est déterminée par

- le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_1$ parallèle à L_1 et de même sens, qui doit être dirigé vers le côté non réfléchissant de M,
- le point d'incidence $P \in M$ de L_1 sur le miroir M.

Nous noterons $\overrightarrow{P}$ le vecteur $\overrightarrow{OP}$, O étant un point fixé, choisi de manière quelconque.

Le rayon réfléchi L_2 est déterminé par

– le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_2$ qui, exprimé au moyen de $\overrightarrow{u}_1$, s'écrit

$$\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_1 + 2(\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}\,,$$

où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire orhtogonal au miroir M au point d'incidence P, avec l'une quelconque des deux orientations possibles ;
– le même point $P \in M$.

En utilisant l'expression de la forme symplectique ω indiquée dans la remarque 3.4 nous voyons qu'il nous suffit de prouver que $\mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{u}_2 = \mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{u}_1$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}(\overrightarrow{u}_2 - \overrightarrow{u}_1) &= 2\mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}\big((\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}\big)\\ &= -2\mathrm{d}\big((\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})(\overrightarrow{n} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P})\big)\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

parce que $\overrightarrow{n} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P} = 0$, la différentielle $\mathrm{d}\overrightarrow{P}$ étant tangente en P au miroir M tandis que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à M en ce point. □

Proposition 4.2. — *Soit R une surface lisse séparant deux milieurs transparents d'indices de réfraction n_1 et n_2. L'application* Refrac_R *qui associe, à chaque rayon lumineux L_1 qui rencontre R du côté du milieu transparent d'indice n_1 sous un angle d'incidence tel qu'il n'est pas totalement réfléchi, le rayon réfracté correspondant $L_2 = \mathrm{Refrac}_R(L_1)$, est un difféomorphisme symplectique de l'ouvert de $(\mathcal{L}, n_1\omega)$ formé par ces rayons incidents sur l'ouvert de $(\mathcal{L}, n_2\omega)$ formé par les rayons réfractés.*

Démonstration. — Un rayon incident L_1 qui rencontre la surface R du côté du milieu d'indice n_1 est déterminé par
– le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_1$ parallèle à L_1 et de même sens, qui doit être dirigé vers le milieu d'indice n_2,
– le point $P \in R$ où ce rayon rencontre la surface R.

Comme ci-dessus nous noterons $\overrightarrow{P}$ le vecteur $\overrightarrow{OP}$, le point O fixé étant choisi de manière quelconque.

Le rayon réfracté $L_2 = \mathrm{Refrac}(L_1)$ est déterminé par
– le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_2$ qui, exprimé au moyen de $\overrightarrow{u}_1$, s'écrit

$$n_2\big(\overrightarrow{u}_2 - (\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}\big) = n_1\big(\overrightarrow{u}_1 - (\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}\big)\,, \qquad (*)$$

où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire orhtogonal au miroir M au point d'incidence P, avec l'une quelconque des deux orientations possibles ;
– le même point $P \in R$.

L'égalité $(*)$ doit permettre de déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_2$ en fonction des deux autres vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{n}$. Si $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{u}_1 - (\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n} = 0$, et $(*)$ implique $\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_1$. Si au contraire $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur non nul $\overrightarrow{u}_1 - (\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{u}_1$ sur la direction de plan tangente en P à la surface réfractante. De même, $\overrightarrow{u}_2 - (\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{u}_2$ sur cette direction de plan, l'égalité $(*)$ montre que cette projection est non nulle et s'écrit sous la forme bien connue de la loi de la réfraction de Snell-Descartes

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \,,$$

où α_1 et α_2 sont les angles que font avec la normale en P à la surface réfractante les rayons, respectivement incident et réfracté. Lorsque $n_1 \leq n_2$ l'égalité $(*)$ détermine, de manière unique, $\overrightarrow{u}_2$ en fonction de $\overrightarrow{u}_1$ et de $\overrightarrow{n}$. Lorsque $n_1 > n_2$ cette égalité détermine encore $\overrightarrow{u}_2$ de manière unique si et seulement si $\dfrac{n_1}{n_2}|\sin\alpha_1| \leq 1$ (nous imposerons dans la suite l'inégalité stricte correspondante afin que l'application Refrac_R soit définie sur un ouvert de $\mathcal{L}$) ; lorsque cette condition n'est pas satisfaite, il ne peut exister de rayon réfracté, le rayon incident est totalement réfléchi.

Comme pour la preuve de la proposition 4.1 il suffit, pour établir le résultat annoncé, de montrer que $n_2 \mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{u}_2 = n_1 \mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{u}_1$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge (n_2 \mathrm{d}\overrightarrow{u}_2 - n_1 \mathrm{d}\overrightarrow{u}_1) &= \mathrm{d}\overrightarrow{P} \wedge \mathrm{d}\big(n_2(\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n} - n_1(\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}\big)\\
&= -\mathrm{d}\Big(\big(n_2(\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{n}) - n_1(\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{n})\big)(\overrightarrow{n} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P})\Big)\\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

parce que $\overrightarrow{n} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P} = 0$, la différentielle $\mathrm{d}\overrightarrow{P}$ étant tangente en P à la surface R , tandis que le vecteur $\overrightarrow{n}$ is normal à R en ce point. □

5. Une famille rectangulaire est une sous-variété lagrangienne

Proposition 5.1. — *Une famille différentiable de rayons de classe 2 est rectangulaire au sens de la définition 1.2 si et seulement si c'est une sous-variété lagrangienne (voir* **[11]** *p. 92, ou* **[12]** *p. 123) immergée de la variété symplectique $(\mathcal{L}, \omega)$ des droites orientées de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — Considérons une famille différentiable $\mathcal{F}$ de droites orientées de classe 2. Chaque élément L_0 de $\mathcal{F}$ possède dans $\mathcal{F}$ un voisinage ouvert image d'une application différentiable injective $L : (k_1, k_2) \mapsto L(k_1, k_2)$, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$, à valeurs dans $\mathcal{L}$, telle que $L(0, 0) = L_0$. La famille $\mathcal{F}$ est donc une sous-variété immergée de dimension 2 de $\mathcal{L}$. Pour chaque élément (k_1, k_2) du domaine de définition de L, la droite orientée $L(k_1, k_2)$ peut être déterminée par

- un point $P(k_1, k_2)$ de $L(k_1, k_2)$,
- le vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}(k_1, k_2)$ de $L(k_1, k_2)$, parallèle à cette droite orientée et de même sens.

Les points $P(k_1, k_2)$ ne sont pas déterminés de manière unique, mais il est possible de les choisir de manière telle que l' applications $(k_1, k_2) \mapsto \bigl(P(k_1, k_2), \overrightarrow{u}(k_1, k_2)\bigr)$ soit différentiable. Par hypothèse cette application est partout de rang 2.

L'image réciproque de la forme symplectique ω sur $\mathcal{L}$ par l'application $(k_1, k_2) \mapsto \bigl(P(k_1, k_2), \overrightarrow{u}(k_1, k_2)\bigr)$ est

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{P}(k_1, k_2)}{\partial k_1} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{u}(k_1, k_2)}{\partial k_2} - \frac{\partial \overrightarrow{P}(k_1, k_2)}{\partial k_2} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{u}(k_1, k_2)}{\partial k_1}\right) \mathrm{d}k_1 \wedge \mathrm{d}k_2 \,,$$

où, comme précédemment, nous avons noté $\overrightarrow{P}(k_1, k_2)$ le vecteur $\overrightarrow{OP}(k_1, k_2)$, O étant un point fixé quelconque de $\mathcal{E}$.

En utilisant la symétrie des dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{P}(k_1, k_2)}{\partial k_1 \partial k_2} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{P}(k_1, k_2)}{\partial k_2 \partial k_1}$$

nous pouvons exprimer l'image réciproque de ω sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial k_2}\left(\overrightarrow{u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial k_1}\right) - \frac{\partial}{\partial k_1}\left(\overrightarrow{u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial k_2}\right)\right) \mathrm{d}k_1 \wedge \mathrm{d}k_2 \,.$$

où, pour alléger les notations, nous avons écrit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{P}$ pour $\overrightarrow{u}(k_1, k_2)$ et $\overrightarrow{P}(k_1, k_2)$.

La sous-variété immergée $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{L}, \omega)$ est lagrangienne si et seulement si l'image réciproque de ω est nulle, c'est-à-dire si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial k_2}\left(\overrightarrow{u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial k_1}\right) = \frac{\partial}{\partial k_1}\left(\overrightarrow{u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial k_2}\right) \,,$$

ou encore si et seulement si, localement, il existe une fonction différentiable $(k_1, k_2) \mapsto F(k_1, k_2)$ telle que

$$\overrightarrow{u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial k_1} = \frac{\partial F}{\partial k_1}, \quad \overrightarrow{u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial k_2} = \frac{\partial F}{\partial k_2}. \tag{$**$}$$

Voyons maintenant les conditions dans lesquelles pour chaque rayon de la famille $\mathcal{F}$ il existe un petit morceau de surface lisse rencontrant orthogonalement ce rayon ainsi que tous les rayons voisins. Nous pouvons supposer que ce rayon courant est l'élément L_0 de $\mathcal{F}$ considéré ci-dessus. Les rayons voisins sont alors les éléments de l'image de l'application $L : (k_1, k_2) \mapsto L(k_2, k_2)$ déjà considérée. S'il existe, le petit morceau de surface cherché est l'image d'une application différentiable de la forme

$$(k_1, k_2) \mapsto P(k_1, k_2) + \lambda(k_1, k_2)\overrightarrow{u}(k_1, k_2),$$

où P et $\overrightarrow{u}$ sont les applications déjà considérées de l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel L est définie, respectivement dans $\mathcal{E}$ et dans l'ensemble des vecteurs unitaires, et où $(k_1, k_2) \mapsto \lambda(k_1, k_2)$ est une fonction différentiable à déterminer. Ce petit morceau de surface est traversé orthogonalement par tous les rayons $L(k_1, k_2)$ si et seulement si la fonction λ vérifie, pour toutes les valeurs possibles de (k_1, k_2),

$$\overrightarrow{u}(k_1, k_2) \cdot \mathrm{d}\Big(\overrightarrow{P}(k_1, k_2) + \lambda(k_1, k_2)\overrightarrow{u}(k_1, k_2)\Big) = 0.$$

En tenant compte des égalités $\overrightarrow{u}(k_1, k_2) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{u}(k_1, k_2) = 0$ et $\overrightarrow{u}(k_1, k_2) \cdot \overrightarrow{u}(k_1, k_2) = 1$, nous pouvons mettre cette condition sous la forme

$$\overrightarrow{u}(k_1, k_2) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P}(k_1, k_2) + \mathrm{d}\lambda(k_1, k_2) = 0. \tag{$***$}$$

Nous voyons que lorsqu'il existe une fonction différentiable F qui satisfait $(**)$, toute fonction de la forme $\lambda = -F+$ Constante satisfait $(***)$, et que réciproquement lorsqu'il existe une fonction différentiable λ qui satisfait $(***)$, toute fonction de la forme $F = -\lambda +$ Constante satisfait $(**)$. Nous pouvons donc affirmer qu'une famille différentiable de rayons de classe 2 est rectangulaire si et seulement si c'est une sous-variété lagrangienne immergée de $(\mathcal{L}, \omega)$ □

6. Le théorème de Malus-Dupin

Puisque les réflexions sur (4.1) et les réfractions à travers (4.2) une surface lisse sont des difféomorphismes symplectiques et que l'application composée de plusieurs difféomorphismes symplectiques est un difféomorphisme symplectique, la propagation de la lumière à travers un système optique comportant un nombre quelconque de telles réflexions ou de réfractions est un difféomorphisme symplectique. L'image d'une sous-variété lagrangienne par un difféomorphisme symplectique est une sous-variété lagrangienne. La proposition 5.1 nous permet donc d'énoncer le théorème suivant, remarquable car il ne fait pas d'hypothèse sur la forme des surfaces réfléchissantes ou réfractantes.

Théorème 6.1 **(théorème de Malus-Dupin)**. — *Une famille rectangulaire de rayons lumineux qui entre dans un système optique comportant un nombre quelconque de surfaces lisses réfléchissantes ou réfractantes, reste rectangulaire tout au long de sa propagation, dans chacun des milieux transparents qu'il traverse.*

7. Remerciements

Je remercie chaleureusement Géry de Saxcé de m'avoir invité à faire un exposé au 58-ème colloque Souriau à Aix-en-Provence, et pour tous les efforts qu'il fait pour assurer le succès et la pérennité de ces colloques.

Je dois à Dominique Flament d'avoir cherché une preuve du théorème de Malus-Dupin utilisant la géométrie symplectique. C'est en effet en préparant l'exposé sur les travaux de William Rowan Hamilton concernant l'optique géométrique récemment présenté à son séminaire *Histoires de Géométries* que je me suis intéressé à ce théorème.

Références

[1] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, second edition. Springer-Verlag, New York, 1978.

[2] A. W. Conway and J. L. Synge, *Appendix Editors* to *Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I* pp. 463–464. Cambridge University Press, London, 1931.

[3] J.-M. Courty, *Notes de cours de l'Université Pierre et Marie Curie, L3 Physique, PGA Chapitre VI page 48*, `http://www.edu.upmc.fr/physique/phys325/Documents/Poly_II_Chap_6.pdf`

[4] C. Dupin, *Applications de la géométrie*, Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1816, publié à Paris en 1822.

[5] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[6] W. R. Hamilton, *On Caustics, Part First*. Manuscript, 1824. In *Sir William Rowan Hamilton mathematical Works*, vol. I, chapter XV, Cambridge University Press, London, 1931.

[7] W. R. Hamilton, *Theory of systems of rays, Part First and Part Second (1827)*. Part first : Trans. Royal Irish Academy, 15 (1828), pp. 69–174. Part Second : manuscript. In *Sir William Rowan Hamilton mathematical Works*, vol. I, chapter I, Cambridge University Press, London, 1931.

[8] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau and P. Vanhaecke, *Poisson structures*. Springer Verlag, Berlin, Heisenberg, 2013.

[9] É. L. Malus, Journal de l'École Polytechnique 7 (1808), pp. 1–44 et 84–129.

[10] É. L. Malus, *Traité d'optique*. Mémoires présentés à l'Institut par divers savans, 2 (1811), pp. 214–302.

[11] P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[12] J.-P. Ortega and T. S. Ratiu, *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2004.

[13] Wikipedia, *Charles Dupin*, `http://fr.wikipedia.org/wiki/Charles_Dupin`

---

11 septembre 2014

C.-M. Marle, 27 avenue du 11 novembre 1918, 92190 Meudon, France
E-mail : `charles-michel.marle@math.cnrs.fr`
Url : `http://marle.perso.math.cnrs.fr/`